УДК 930.85;656.137.

Павловская В.В.

ПРОБЛЕМА УСТОЙЧИВОСТИ ФИГУР РАВНОВЕСИЯ ГРАВИТИРУЮЩЕЙ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ЖИДКОЙ МАССЫ В РАБОТАХ УЧЕНЫХ XVIII-XIX СТОЛЕТИЙ

В статті подано короткий огляд праць вчених XVIII-XIX століть, присвячених проблемі утворення і стійкості Сонячної системи. В цих працях головна увага приділялась фігурам рівноваги рідкої маси, що обертається, та їх стійкості. Кожне з таких досліджень опиралось на певні критерії і пропонувало власну методику розв'язування задач, пов'язаних із стійкістю рідких фігур рівноваги. Не дивлячись на те, що автори розглядали окремі сторони проблеми, їх результати відіграли значну роль при створенні в кінці XIX – на початку XX століть теорії стійкості фігур рівноваги рідкої маси, що обертається, частинки якої взаємодіють за законом Ньютона.

В статье дан краткий обзор работ ученых XVIII-XIX столетий, посвященных проблеме образования и устойчивости Солнечной системы. В этих работах главное внимание уделялось фигурам равновесия вращающейся жидкой массы и их устойчивости. Каждое из таких исследований опиралось на определенные критерии и предлагало свою методику решения задач, связанных с устойчивостью жидких фигур равновесия. Несмотря на то, что авторы затрагивали отдельные стороны проблемы, их результаты сыграли значительную роль при создании в конце XIX – начале XX столетий теории устойчивости фигур равновесия вращающейся жидкой массы, частицы которой взаимодействуют по закону Ньютона.

The article gives a brief overview of the XYIII – XIX century's scientists' researches, devoted to the problem of the Solar system formation and stability. These studies paid attention mainly to the forms of equilibrium of the revolving liquid mass and their stability. Each research was based on specific criteria that proposed its own methods to solve the problem connected to liquid mass balancing figures stability. Although authors had touched different aspects of the problem, their results have played an important part in forming a theory on the revolving liquid mass balancing figures stability, particles of which interact with each other according to the law of Newton, in the end of XIX and beginning of XX centuries.

Исторически теория устойчивости жидких фигур равновесия связана с проблемой возникновения и устойчивости Солнечной системы и следующей из неё проблемой образования и формы планет.

С открытием в 1687 году И. Ньютоном закона всемирного тяготения (всемирной гравитации) [1, с. 531–541] стало возможным по-новому взглянуть на проблему эволюции Солнечной системы.

Согласно гипотезе Лапласа планеты Солнечной системы образовались из вращающейся газовой туманности в процессе медленного охлаждения. Вопрос о фигуре планет сводился к более общему: определение фигур равновесия вращающейся жидкой массы, частицы которой взаимодействуют по закону Ньютона. Однако проблема устойчивости таких фигур равновесия стала предметом изучения почти 100 лет спустя, поскольку математический аппарат решения задач устойчивости состояния механических систем был разработан значительно позже. Более того, в начале XVIII столетия ни в классической, ни в небесной механике не было строго определено само понятие устойчивости. Так, определение устойчивости в смысле Лагранжа [2, с. 97] сводилось к свойству слабо возмущенной системы колебаться в достаточно малой окрестности её невозмущенного состояния. Устойчивость по Пуассону [3, с. 490–494] определялась как свойство слабо возмущенной системы проходить её положение равновесия бесконечное число раз. Однако эти определения строились на достаточно расплывчатых понятиях "очень малых", "бесконечно малых", "слабых", "небольших" и т.п. отклонениях возмущенной системы от её невозмущенного состояния.

В 1740 году П. Мопертюи [4, с. 43] предположил, что состоянию относительного покоя материальной системы должно соответствовать экстремальное значение её кинетической энергии.

В 1748 году Г. Куртиврон [5, с. 16], изучая состояние равновесия слабо возмущенной системы, установил, что устойчивому равновесию такой системы должен соответствовать максимум кинетической энергии.

Ж. Даламбер в 1773 году [6], исследуя фигуры равновесия вращающейся жидкой массы, частицы которой взаимодействуют по закону всемирной гравитации, в качестве критерия устойчивости использовал условие максимума кинетической энергии и показал, что этому условию при определённых ограничениях скорости вращения соответствуют эллипсоиды вращения (эллипсоиды Маклорена).

А.М. Лежандр в 1784 году [7] при определении жидких фигур равновесия, близких к сфере, описывал слабые возмущения поверхности вращающейся жидкой массы с помощью сферических функций (полиномов Лежандра). В дальнейшем этот метод получил развитие в работах И. Лиувилля и А. Пуанкаре.

В конце XVII столетия Ж. Лагранж в своей "Аналитической механике" при изучении малых колебаний механических систем [2, т. 1, р. 4] исследовал устойчивость слабо возмущенного состояния системы в окрестности её невозмущенного состояния путём интегрирования дифференциальных уравнений, описывающих слабо возмущенное состояние данной системы. Лагранж дал определение устойчивости состояния равновесия слабо возмущенной системы [2, т. 1, с. 97], сформулировал и доказал теорему о том, что устойчивому состоянию слабо возмущенной системы соответствует минимум потенциальной энергии системы.

Однако, доказательство теоремы, выполненное Лагранжем, нельзя считать достаточно строгим. Так, при описании слабых возмущений системы с помощью бесконечных рядов Лагранж пренебрегает членами высших порядков малости, априори считая, что они не могут существенно влиять на результат, не уточняя при этом самого понятия бесконечно малой величины. Систему с бесконечным числом степеней свободы Лагранж рассматривает как предельный случай конечномерной системы. Это положение определило развитие теории движения непрерывной среды вплоть до работ А.М. Ляпунова, внесшего необходимые коррективы в сущность вопроса.

Более строгое обоснование теоремы Лагранжа принадлежит Ж. Дирихле, который в 1846 году [8] показал, что наличие локального максимума кинетической энергии в положении равновесия слабо возмущенной системы является достаточным условием устойчивости этого положения. Данное условие устойчивости в дальнейшем получило название критерия Лагранжа-Дирихле, или энергетического критерия. Используя этот критерий, Дирихле показал, что вращающаяся жидкая масса, приняв форму эллипсоида Маклорена, устойчива при определённых ограничениях скорости вращения.

Ко второй половине XVIII столетия относится труд П. Лапласа по небесной механике [9]. В нем он сформулировал и доказал теорему об устойчивости равновесия моря [9, т. 2, с. 216–223]. Изучая состояние устойчивости жидкого слоя на твёрдом ядре, Лаплас учитывал слабые возмущения не только координат, но и скоростей точек, находящихся во вращении, что связано с динамической устойчивостью системы. При описании слабых возмущений жидкой массы использовались гармонические функции. В дальнейшем эти идеи получили распространение на более общие случаи равновесия вращающейся жидкой массы. Лаплас доказал, что равновесие жидкого слоя на твёрдом ядре может быть устойчивым лишь в случае, когда плотность жидкости меньше средней плотности ядра.

П. Лапласу принадлежит постановка задачи устойчивости колец Сатурна [9, т. 2, с. 166–177]. Ученый предположил, что кольца в системе Сатурна покрыты тонким слоем жидкости, находящейся под действием сил притяжения между кольцом и центральным телом, а также центробежной силы, как результата вращения кольца вокруг планеты. Лаплас определил силу притяжения кольца Сатурном и установил, что для сохранения равновесия центр тяжести кольца должен выполнять периодические колебания около центра тяжести планеты, отклоняясь от него на незначительную величину, не уточняя при этом степени малости этого отклонения.

Следует заметить, что Лаплас учитывал лишь силы притяжения между планетой и кольцом, пренебрегал силами притяжения между кольцами, предположив их достаточную малость. Полученные результаты позволили Лапласу сделать вывод, что вращение твёрдого кольца вокруг планеты не может быть устойчивым.

Результаты П. Лапласа в 1874 году были дополнены С.В. Ковалевской [10], однако вопроса устойчивости колец ученая не рассматривала ввиду особой сложности задачи.

К середине XIX столетия относятся работы И. Лиувилля [11,12], посвященные изучению слабых возмущений поверхности вращающейся жидкой массы. Лиувилль определил зависимость осей вращающегося трёхосного жидкого эллипсоида (эллипсоида Якоби) от угловой скорости вращения. Эти результаты автор стремился применить [12] к изучению объектов, наблюдаемых астрономами. Задача осталась нерешенной. В настоящее время найдены её решения лишь для отдельных случаев вращающихся масс.

Решая задачу устойчивости равновесия моря [12], И. Лиувилль в качестве ядра, покрытого тонким слоем жидкости, рассматривал эллипсоид. Применив критерий устойчивости Лагранжа-Дирихле, автор показал, что для сохранения равновесия данной системы масса центрального тела должна значительно превышать массу жидкого слоя, что подтверждало результаты Лапласа.

Во второй половине XVII столетия были обнаружены двойные звезды, в большинстве случаев представлявшие собой взаимно притягивающиеся звёздные пары. Также наблюдались двойные звёзды, которые в телескоп воспринимались как звезда с переменным блеском. Вопрос об их происхождении и эволюции был достаточно интересен для исследователей.

В 1850 году М.Е. Рош [14] впервые исследовал вращение бесконечно малого жидкого спутника вокруг твёрдой сферической планеты и установил так называемый “предел Роша” для орбиты спутника, меньше которого жидкая фигура равновесия должна разрушиться. Модель Роша вызывала интерес как предельный случай устойчивости жидких фигур равновесия.

В 1888 году К. Шварцшильд [15] высоко оценил эти результаты Роша и изучил проблему более подробно, проанализировав основные условия устойчивости вращающихся жидких фигур равновесия при переходе одной фигуры равновесия в другую.

Исследованию устойчивости жидкого слоя на твердом ядре посвящена работа А. Гизена 1873 года [16]. В ней в качестве ядра, покрытого жидким слоем, рассматривались шар и эллипсоид вращения малого эксцентриситета. Критерием устойчивости равновесия такой системы был избран энергетический критерий.

В 1877 году Ж. Хаген [17], следуя методике А. Гизена, в качестве ядра, покрытого жидким слоем, избрал трёхосный эллипсоид малого эксцентриситета. При описании плотности жидкой массы и потенциальной энергии системы использовались функции Ламе. Ж. Хаген установил, что для устойчивости состояния равновесия необходимо, чтобы жидкость и ядро сохраняли одинаковую кривизну.

В 1860 году Р. Дедекинд [18] сформулировал и доказал теорему об условиях сохранения своей формы жидким эллипсоидом Якоби, определив при этом сопряженные эллипсоиды, получившие название эллипсоидов Дедекинда. Однако задачи, связанные с устойчивостью таких фигур равновесия, оказались сложными, и их решение Дедекиндом не было завершено.

Задачам устойчивости фигур равновесия гравитирующей вращающейся жидкой массы посвящены работы Б. Римана [19, 20], относящиеся к 1861 году, в которых движение жидкой массы рассматривалось в инерциальной и подвижной системах координат. Б. Риман показал, что при линейной зависимости поля скоростей от координат наиболее общим видом движений, сохраняющих эллипсоидальную фигуру равновесия, является совокупность равномерного вращения и внутреннего движения частиц с равномерной завихрённостью во вращающейся системе координат. Путем достаточно сложных вычислений Риман установил, что с постоянством формы связано постоянство движения, заключающееся в неизменности относительного движения всех частиц жидкой массы. При решении задачи устойчивости жидких фигур равновесия Б. Риман применил критерий Лагранжа-Дирихле, а для определения потенциальной энергии системы использовал бесконечные ряды. Риман получил условия, при которых вращающаяся жидкая масса сохраняет эллипсоидальную фигуру равновесия.

Мемуары Б. Римана сыграли заметную роль в дальнейшем развитии теории гравитационной устойчивости фигур равновесия вращающейся жидкой массы. На его работы ссылался А.М. Ляпунов как на одни из самых значительных, касающихся существования и устойчивости жидких фигур равновесия. Её высоко оценил С. Чандрасехкар [21] и использовал методику Римана в аналогичных исследованиях.

В XIX столетии для теории устойчивости существенное значение имел переход от нормально-частотного к показательному представлению решений дифференциальных уравнений, что дало общий инструмент решения задач устойчивости в теории малых колебаний механических систем. Достаточным условием устойчивости слабо возмущенной системы являлась отрицательность вещественной части корней характеристического уравнения консервативной системы.

Такой путь избрал К. Максвелл в 1859 году для решения задачи устойчивости колец Сатурна [22]. Считая исследования Лапласа неоконченными, Максвелл решил изучить все предполагаемые виды колец. При доказательстве теоремы Лапласа о неустойчивости твердого кольца, окружающего твердое ядро, автор использовал критерий устойчивости Лагранжа-Дирихле, а также метод Лагранжа описания малых возмущений состояния равновесия материальной системы. Исследование корней характеристического уравнения свидетельствовало о неустойчивости твердого кольца, вращающегося вокруг планеты.

Исследуя кольцо, состоящее из отдельных твердых либо жидких частиц, Максвелл доказывает, что в случае слабых возмущений поверхности кольца и при достаточно большом центральном ядре такое кольцо может находиться в устойчивом равновесии относительно центра. Анализ решений характеристического уравнения показал, что при достаточно большом центральном теле возможно кольцо, состоящее из спутников, при этом устойчивость равновесия системы зависит от количества спутников в кольце. Возмущающую силу Максвелл представляет в виде тригонометрического ряда и показывает, что величина и направление этой силы зависит от сравнительных скоростей вынужденных и свободных колебаний элементов кольца. Изучая случай концентричных колец, Максвелл установил, что наиболее значительными являются возмущения в одном кольце вследствие влияния соседнего кольца. Однако это сложное движение Максвеллу изучить не удалось. Вопрос остается открытым и в настоящее время.

Таким образом, К. Максвелл пришел к выводу, что в системе колец Сатурна должны существовать сгущения и разрежения массы частиц, периодически перемещающиеся вдоль кольца, причем максимальная плотность кольца не должна превосходить 1/300 плотности планеты, что свидетельствовало о дискретной структуре кольца.

В 1877 году А. Гизен [23] при изучении устойчивости колец Сатурна предположил, что в определённый период эволюции кольца были жидкими. Сложность задачи заключалась в определении потенциальной энергии кольца. Автор показал, что в первом приближении переменную часть внутреннего потенциала кольца достаточно большого диаметра можно свести к внутреннему потенциалу эллипсоида с бесконечно большой осью. В результате А. Гизен установил, что при определенных ограничениях угловых скоростей возможны кольца кругового сечения и плоские кольца, при этом центр тяжести кольца должен периодически колебаться возле центра тяжести планеты.

Теоретические результаты К. Максвелла и его последователей были подтверждены наблюдениями астрономов. Так, в 1892 году Э.Э. Бернгард заметил, что спутник Сатурна не затемняется кольцом, что свидетельствовало о дискретности строения кольца. В 1895 году А.А. Белопольский и независимо от него Дж. Киллер и Дж. Деландр установили, что скорости вращения колец Сатурна изменяются с удалением от центра вращения. В 1900 году дискретность колец Сатурна с помощью фотометрии подтвердил Э. Хуго. В 1909–1911 годах Г.А. Тихов получил цветные снимки колец, свидетельствующие об их дискретности. В 1977 году американские астрономы открыли пять колец Урана. Наблюдались кольца в системах Юпитера, Нептуна. Загадкой оставались некоторые явления в структуре колец Сатурна, обнаруженные астрономами станции “Вояджер-1” в 1977 году.

Таким образом, в рассматриваемый период многие ученые занимались изучением устойчивости фигур равновесия вращающейся жидкой массы. Дифференциальные уравнения, описывающие движение материальной системы с бесконечным числом степеней свободы, были гораздо сложнее по отношению к конечномерным системам. В ряде исследований при изучении движения жидкой массы предполагалось учитывать действие внутренних сил трения или вязкости. Для решения таких задач требовалась разработка более совершенных методов. Одновременно стала очевидной необходимость более глубокого и всестороннего изучения проблемы устойчивости, а также уточнения и обоснования ряда теоретических положений и утверждений. Первое обобщение результатов исследований устойчивости фигур равновесия гравитирующей вращающейся жидкой массы выполнили в 1867 году В. Томсон и П. Тэт [24, с. 770–816], однако целый ряд вопросов требовал более глубокого изучения.

Большая заслуга в построении общей теории фигур равновесия гравитирующей вращающейся жидкой массы принадлежит А. Пуанкаре [25] и А.М. Ляпунову [26], в трудах которых нашли широкое обсуждение и научное обоснование основные положения теории. В этих работах были разработаны методы определения ответвления (бифуркации) жидких фигур равновесия при изменениях угловых скоростей вращения. Эти методы нашли применения при исследовании эволюции небесных объектов в связи с задачами звёздной динамики, бурное развитие которой во второй половине XX столетия показало, что во Вселенной наблюдается всё многообразие гравитирующих фигур равновесия, прежде полученных теоретическим путём.

Литература и источники

1. Ньютон И.Математические начала натуральной философии/ И.Ньютон.-Собрание сочинений трудов А.Н.Крылова. – М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1936. – Т.7. – 696 с.
2. Лагранж Ж. Аналитическая механика/ Ж.Лагранж. – М.-Л.: ГИТТЛ, 1950, в 2 т. – С. 594, 440.
3. Poisson S.D. Traite de Mecanique celeste/ S.D. Poisson. – 2 ed., Paris, 1833-782 p.
4. Maupertuis P. De figures, quas fluida rotata in duere possunt, aun conjectures de stellis, de annula Saturnis/ P. Maupertuis. – Phil.Trans., 1732; Sur les lois d’Attraction Memoirs 1732, p. 343-362.
5. Courtivron G. Recherches de Statique et de Dynamigue, on l’on donne un nouveau principe general pour la consideration des corps animee par des forces variables, suivant une lois queqonque Histoire de l’Academie des Sci/ G. Courtivron. – Paris, Annee, 1749, p. 15-27.
6. Даламбер Ж. О фигуре Земли/ Ж. Даламбер. – А.Клеро, Теория фигуры Земли. – М.: Изд-во АН СССР, 1947. – С. 201-216.

7. Legendre A.M.Recherches sur la figure des Planetes/ A.M. Legendre. – Histoire de l’Academie Roy. Des Schi., 1784.
8. Dirichlet G.Ueber die Stabilitat des Gleichgewichts/ G. Dirichlet. – J.d. die reine und angew., Math., 1846, 32, s.85-88.
9. Laplase P.S. Traite de Mecanique Celeste/ P.S. Laplase. – Paris, 1878 in 5t.
10. Ковалевская С.В. К решению задачи о кольцах Сатурна/ С.В. Ковалевская. – Научн. Работы, – М.: Изд-во АН СССР, 1948. – С. 139-152.
11. Liouville I. Formules generales relativesa la question de la stabilite d’une masse liquide homogene donee d’un movement de rotation autour d’une axe/ I. Liouville. – J. de Math., 1855, 20, p.164-184.
12. Liouville I. Rechenches sur la stabilite de l’equilidre des fluides/ I. Liouville.- Comp. rend., 1843, 16, p.363.
13. Liouville I. Sur la stabilite de l’equibre des mers/ I. Liouville.- Comp. rend., 1842, 15, p. 903-907.
14. Roche M.Ed. Memoire sur la figure d’une masse fluide/ M.Ed. Roche.- Acad.des sci. de Montpellier, 1847-1850,1, pp. 243-266, 333-348.
15. Schwarzschild K. Die poincaresche Theorie der Gleichgewichts/ K. Schwarzschild.- Ann. der K. Sternwarte Munchen, 1898, 3.
16. Giesen A. Ueber der Stabilitat des Gleichgewichts einer nur die Grawitation unterworfenen Flussigkeit / A. Giesen. – Iahren-Bericht uber die hohere Schule in Opladen, 1872-1873.
17. Hagen J. Ueber die Stabilitat des einem Gleichgewichtes einer dreiaxigen Ellipsoid mit kleinen Exentrisitaten ausgebreichen Flussigkeit etc./ J. Hagen.- O. Schlomlichs Zeitschrift. J. Math. und Phys., 1877, 22, s. 65-86.
18. Dedeking R. Zusatz zu der vorstehenden Abhandlung/ R. Dedeking. – J. Reine Angew. Math., 1860,58, p. 217-228.
19. Риман Б. О движении жидкого эллипсоида/ Б. Риман. – Соч. М.-Л.: ОГИЗ, 1948. – С. 339-367.
20. Риман Б. О потенциале тора/ Б. Риман. – Соч. М.-Л.: ОГИЗ, 1948. – С. 367 372.
21. Чандрасекхар С. Эллипсоидальные фигуры равновесия/ С. Чандрасекхар. – М.:МИР, 1973. – 288с.
22. Maxwell K. On the stability of the motion Saturn’s rings/ K. Maxwell. – Collelted papers, Cambridge, 1859, v.1, p. 294-377.
23. Giessen A. Gestalt eines um einem Centralkorper rotierenden homogenen Flussigkeitringen/ A. Giessen. – O.Schlomilchs Zeitschzisft f.Math und Phys., 1877, 22, p. 311-323.
24. Thomson W., Tait P.G. Treatis on Natural Philosophy/ W. Thomson. – Oxford, 1883, 2 ed. – 572p.
25. Poincare H. Oeuvres/ H. Poincare. – Paris, 1952, in 8t., v.7, p.40-158.
26. Ляпунов А.М. Об устойчивости эллипсоидальных форм равновесия вращающихся жидкости/ А.М. Ляпунов. – Собр. соч. в 5-ти томах. – М.: Изд-во АН СССР, 1959, Т.3, С.5-113.